Colloquium Espoirs
25 juin 2013

Camille Couprie : *« Optimisation variationnelle discrète et applications en vision par ordinateur »*

Mathilde Noual: *"About time and the structure of interaction systems"*

Mathieu Feuillet: *"Bandwidth Allocation in Large Stochastic Networks"*

Camille Couprie

Optimisation variationnelle discrète et applications en vision par ordinateur

Optimisation variationnelle discrète

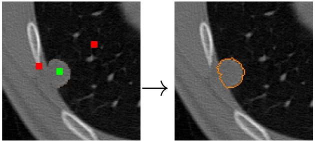
et applications en vision par ordinateur

Camille Couprie,
Laurent Najman, Hugues Talbot et Leo Grady.
IFP Energies Nouvelles, Rueil Malmaison, France
LIGM, Université Paris Est, ESIEE, France
Siemens Corporate Research, Princeton, puis Heartflow, USA

25 juin 2013, Colloquium UPMC

Introduction

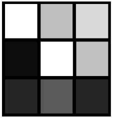
Leo Grady
Laurent Najman
Hugues Talbot

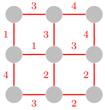


Introduction

- L'image est vue comme un graphe $G = (V, E)$, $n = |V|$, $m = |E|$.

Image $3 \times 3 \rightarrow$ Graphe pondéré 3×3

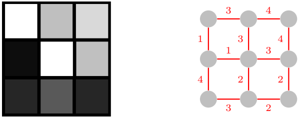




Introduction

- L'image est vue comme un graphe $G = (V, E)$, $n = |V|$, $m = |E|$.

Image $3 \times 3 \rightarrow$ Graphe pondéré 3×3

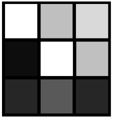


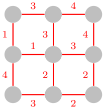
- Les arêtes sont pondérées par une mesure de dissimilarité c-à-dire inversement proportionnelle au gradient de l'image.

Introduction

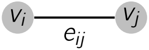
- L'image est vue comme un graphe $G = (V, E)$, $n = |V|$, $m = |E|$.

Image $3 \times 3 \rightarrow$ Graphe pondéré 3×3





- Les arêtes sont pondérées par une mesure de dissimilarité c-à-dire inversement proportionnelle au gradient de l'image.

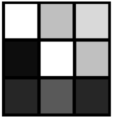
- Notations : 

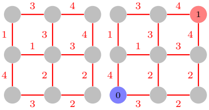
poids de l'arête $e_{ij} = w_{ij}$

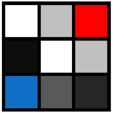
Introduction

- L'image est vue comme un graphe $G = (V, E)$, $n = |V|$, $m = |E|$.

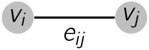
Image $3 \times 3 \rightarrow$ Graphe pondéré 3×3 Marqueurs







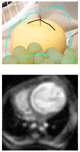
- Les arêtes sont pondérées par une mesure de dissimilarité c-à-dire inversement proportionnelle au gradient de l'image.

- Notations : 

poids de l'arête $e_{ij} = w_{ij}$

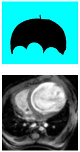
Hypothèses de régularité

Formulation variationnelle pour résoudre nos problèmes :



data f

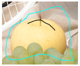
$$\rightarrow \boxed{\min_{x \in \mathbb{R}^n} \sum_{x_i \in V} \underbrace{R(\nabla x)}_{\text{Régularisation}} + \underbrace{\mathcal{D}(x_i, f_i)}_{\text{Fidélité aux données}}} \rightarrow$$

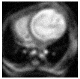


solution x

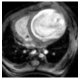
Hypothèses de régularité

Formulation variationnelle pour résoudre nos problèmes :





$$\rightarrow \boxed{\min_{x \in \mathbb{R}^n} \sum_{x_i \in V} \underbrace{R(\nabla x)}_{\text{Régularisation}} + \underbrace{\mathcal{D}(x_i, f_i)}_{\text{Fidélité aux données}}} \rightarrow$$

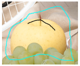


data f solution x

La solution x peut être un étiquettage :

Hypothèses de régularité

Formulation variationnelle pour résoudre nos problèmes :



data f

$$\rightarrow \boxed{\min_{x \in \mathbb{R}^n} \sum_{x_i \in V} \underbrace{R(\nabla x)}_{\text{Régularisation}} + \underbrace{\mathcal{D}(x_i, f_i)}_{\text{Fidélité aux données}}} \rightarrow$$

solution x

La solution x peut être un étiquettage :

- partitionnant une image en differente régions

Hypothèses de régularité

Formulation variationnelle pour résoudre nos problèmes :

data f

$$\rightarrow \boxed{\min_{x \in \mathbb{R}^n} \sum_{x_i \in V} \underbrace{R(\nabla x)}_{\text{Régularisation}} + \underbrace{\mathcal{D}(x_i, f_i)}_{\text{Fidélité aux données}}} \rightarrow$$

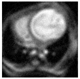
solution x

La solution x peut être un étiquettage :

- partitionnant une image en differente régions
- correspondant à une carte de profondeur pour la reconstruction 3D

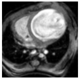
Hypothèses de régularité

Formulation variationnelle pour résoudre nos problèmes :



data f

$$\rightarrow \boxed{\min_{x \in \mathbb{R}^n} \sum_{x_i \in V} \underbrace{R(\nabla x)}_{\text{Régularisation}} + \underbrace{\mathcal{D}(x_i, f_i)}_{\text{Fidélité aux données}}} \rightarrow$$



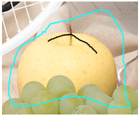
solution x

La solution x peut être un étiquettage :

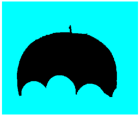
- partitionnant une image en differente régions
- correspondant à une carte de profondeur pour la reconstruction 3D
- restaurant les intensités d'une image f [Modèle ROF, 1992]

Genericité des approches dans les graphes

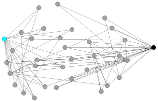
Segmentation avec marqueurs



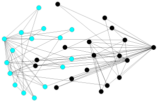
→ ?



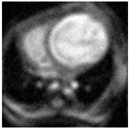
Classification



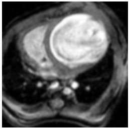
→ ?



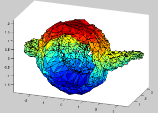
Restauration d'images



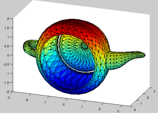
→ ?



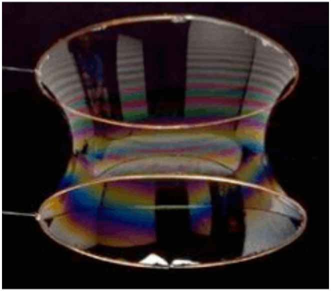
Filtrage de maillages 3D



→ ?



Surfaces minimales

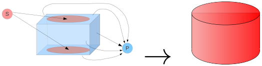


Outil classique de segmentation : Coupes minimales

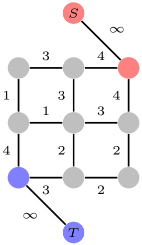
- Ford et Fulkerson 1960, Boykov-Joly 1998
- Dualité avec Flot maximum

$$\min_{\substack{x\in\mathbb{R}^n \\ x(F)=1 \\ x(B)=0}} \sum_{e_{ij}\in E} w_{ij}|x_i - x_j| = \max_{\substack{F\in\mathbb{R}^m \\ div(F)=0 \\ |F|\leq w}} F_{\text{Source}\rightarrow\text{ Puits}}$$

- Expérience de segmentation



l'aire du volume obtenu n'est pas minimale

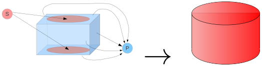


Outil classique de segmentation : Coupes minimales

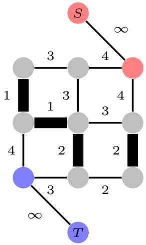
- Ford et Fulkerson 1960, Boykov-Joly 1998
- Dualité avec Flot maximum

$$\min_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ x(F)=1 \\ x(B)=0}} \sum_{e_{ij} \in E} w_{ij} |x_i - x_j| = \max_{\substack{F \in \mathbb{R}^m \\ div(F)=0 \\ |F| \leq w}} F_{\text{Source} \rightarrow \text{ Puits}}$$

- Expérience de segmentation



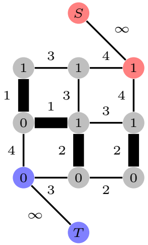
l'aire du volume obtenu n'est pas minimale



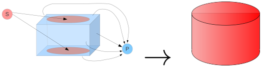
Outil classique de segmentation : Coupes minimales

- Ford et Fulkerson 1960, Boykov-Joly 1998
- Dualité avec Flot maximum

$$\min_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ x(F)=1 \\ x(B)=0}} \sum_{e_{ij} \in E} w_{ij}|x_i - x_j| = \max_{\substack{F \in \mathbb{R}^m \\ div(F)=0 \\ |F| \leq w}} F_{\text{Source} \rightarrow \text{ Puits}}$$



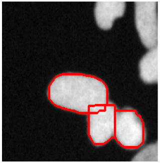
- Expérience de segmentation



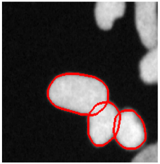
l'aire du volume obtenu n'est pas minimale

Effets de blocs

- Dans le continu : coupes (surfaces en 3D) minimales sont le problème dual du flot max continu [Strang 1983]
- Tendance récente : employer un flot max spatialement *continu* flot maximum pour produire des solutions sans ce bias.
- [Appleton-Talbot 2006, generalisé par Unger-Pock-Bishof 2008] L'algorithme le plus rapide de flot maximum n'a ni **critère d'arrêt**, ni **preuve de convergence**.



Flot max (Coupes minimales)

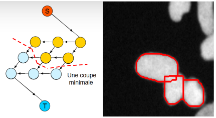


Flot max continu [Appleton-Talbot 2006]

Flot maximum continu combinatoire (CCMF)

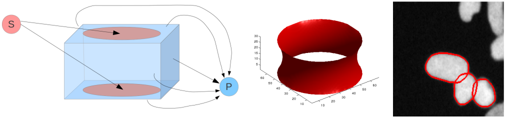
$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \sum_{e_{ij} \in E} R(x_i, x_j) + \sum_{e_{ij} \in E} D(x_i, x_j) = \max_{\substack{F \in \mathbb{R}^m, div(F)=0 \\ \|F\|_2 \leq w}} F_{\text{Source} \to \text{ Puits}}$$

"Coupes minimales"



$\rightarrow$

Méthode proposée $\rightarrow$ surfaces minimales

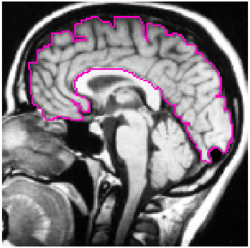


Notre contribution : nouvelle formulation isotrope discrète

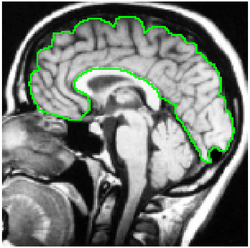
[SIAM Journal on Imaging Sciences, 2011]

- **évite les artefacts d'effets de blocs**
- algo primal-dual une **converge démontrée**, est **rapide**
- **est général, fonctionne dans des graphes arbitraires**

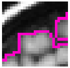
Comparaison avec les coupes minimales



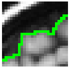
Résultat Coupes Minimales



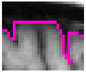
Résultat CCMF



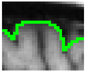
CM



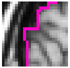
CCMF



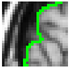
CM



CCMF

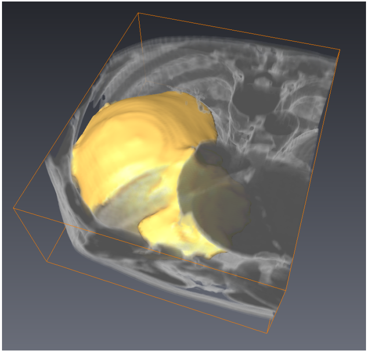


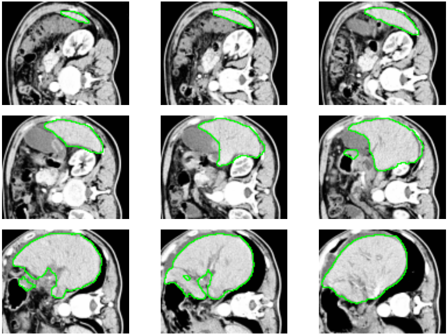
CM



CCMF

Segmentation d'images 3D





Segmentation du foie

Extension à la résolution de problèmes multi-label

Restauration de données [Couprie-Talbot-Pesquet-Najman-Grady, ICASSP 2011]

- Formulation combinatoire contrainte du problème de minimisation de la variation totale (restauration d'images).
- Exploitation de problèmes duaux.
- Optimisation par méthodes proximales parallèles.

- Débruitage et défloutage d'images

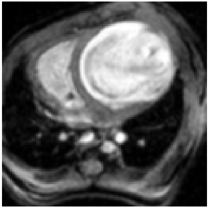
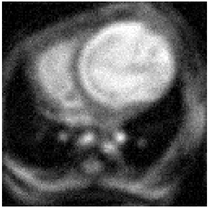
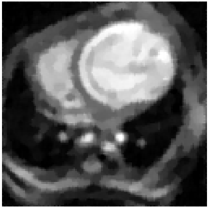


Image originale



Bruitée, floue SNR=24.3dB



DCTV SNR=27.7dB

Extension à la résolution de problèmes multi-label

Restauration de données [Couprie-Talbot-Pesquet-Najman-Grady, ICASSP 2011]

- Formulation combinatoire contrainte du problème de minimisation de la variation totale (restauration d'images).
- Exploitation de problèmes duaux.
- Optimisation par méthodes proximales parallèles.

- Fusion d'images

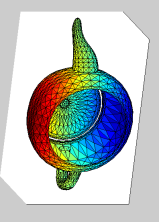
Image originale	Bruitée SNR=17.3dB	floue SNR=23.9dB	DCTV SNR=26.5dB

Extension à la résolution de problèmes multi-label

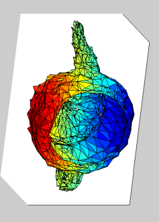
Restauration de données [Couprie-Talbot-Pesquet-Najman-Grady, ICASSP 2011]

- Formulation combinatoire contrainte du problème de minimisation de la variation totale (restauration d'images).
- Exploitation de problèmes duaux.
- Optimisation par méthodes proximales parallèles.

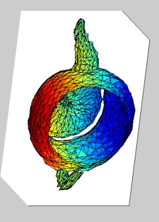
- Filtrage de maillages



Maillage original



Maillage buité



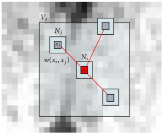
régularisation DCTV

Extension à la résolution de problèmes multi-label

Restauration de données [Couprie-Talbot-Pesquet-Najman-Grady, ICASSP 2011]

- Formulation combinatoire contrainte du problème de minimisation de la variation totale (restauration d'images).
- Exploitation de problèmes duaux.
- Optimisation par méthodes proximales parallèles.

- Débruitage d'images à l'aide de patches



Graphe non local
Figure P. Coupé

Image originale

Image bruitée
PSNR=28.1dB

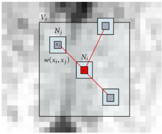
DCTV non locale
PSNR=35 dB

Extension à la résolution de problèmes multi-label

Restauration de données [Couprie-Talbot-Pesquet-Najman-Grady, ICASSP 2011]

- Formulation combinatoire contrainte du problème de minimisation de la variation totale (restauration d'images).
- Exploitation de problèmes duaux.
- Optimisation par méthodes proximales parallèles.

- Débruitage d'images à l'aide de patches



Graphe non local
Figure P. Coupé

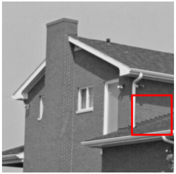


Image originale

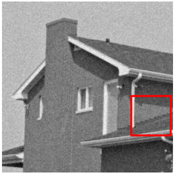
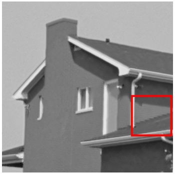


Image bruitée
PSNR=28.1dB



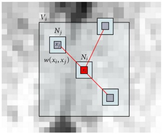
DCTV non locale
PSNR=35 dB

Extension à la résolution de problèmes multi-label

Restauration de données [Couprie-Talbot-Pesquet-Najman-Grady, ICASSP 2011]

- Formulation combinatoire contrainte du problème de minimisation de la variation totale (restauration d'images).
- Exploitation de problèmes duaux.
- Optimisation par méthodes proximales parallèles.

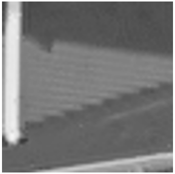
- Débruitage d'images à l'aide de patches



Graphe non local
Figure de
P. Coupé et al.

Image originale

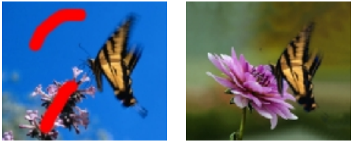
Image bruitée
PSNR=28.1dB



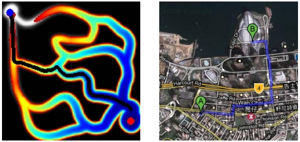
DCTV non locale
PSNR=35 dB

Que possèdent ces problèmes en commun ?

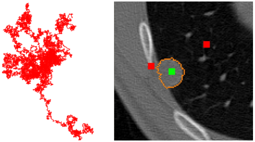
Coupes minimales



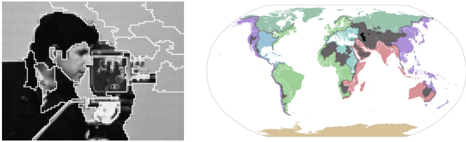
Plus courts chemins



Marcheur aléatoire

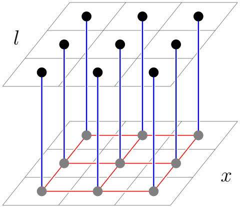


Ligne de partage des eaux



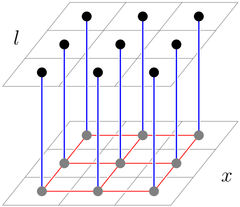
Liens établis précédement

$$\arg\min_x \underbrace{\sum_{e_{ij}\in E} {w_{ij}}^q |x_i - x_j|^q}_{\text{Terme de régularisation}} + \underbrace{\sum_{v_i\in V} {w_i}^q |x_i - l_i|^q}_{\text{Data term}}$$



Liens établis précédement

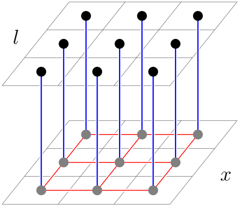
$$\arg\min_x \underbrace{\sum_{e_{ij}\in E} {\color{red} w_{ij}} \; |x_i - x_j|}_{\color{red}\text{Terme de régularisation}} \; + \underbrace{\sum_{v_i \in V} {\color{blue} w_i} \; |x_i - l_i|}_{\color{blue}\text{Data term}}$$



$q = 1$: Coupes minimales [Boykov-Joly 2001]
(seulement pour 2 labels l)

Liens établis précédement

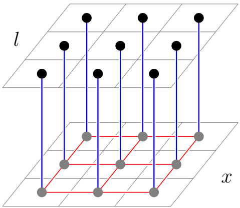
$$\arg\min_x \underbrace{\sum_{e_{ij}\in E} {w_{ij}}^2 |x_i - x_j|^2}_{\text{Terme de régularisation}} + \underbrace{\sum_{v_i\in V} {w_i}^2 |x_i - l_i|^2}_{\text{Data term}}$$



$q = 2$: Marcheur aléatoire [Grady 2006]

Liens établis précédement

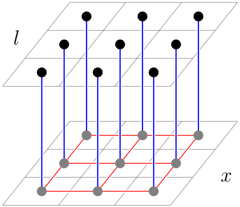
$$\lim_{q\to\infty} \arg\min_x \underbrace{\sum_{e_{ij}\in E} {w_{ij}}^q |x_i - x_j|^q}_{\text{Terme de régularisation}} + \underbrace{\sum_{v_i \in V} {w_i}^q |x_i - l_i|^q}_{\text{Data term}}$$



$q \to \infty$: Plus courts chemins [Sinop-Grady 2007]

Liens établis précédement

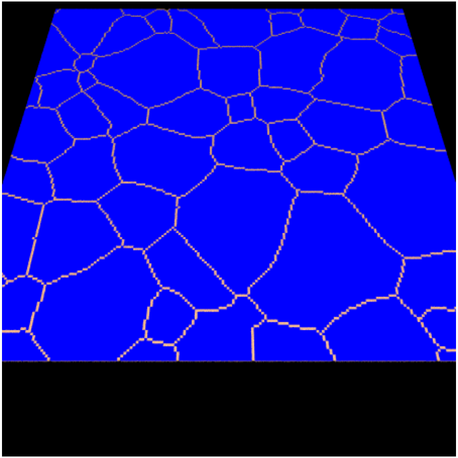
$$\lim_{p\to\infty} \arg\min_x \underbrace{\sum_{e_{ij}\in E} {w_{ij}}^p |x_i - x_j|}_{\text{Terme de régularisation}} + \underbrace{\sum_{v_i\in V} {w_i}^p |x_i - l_i|}_{\text{Data term}}$$



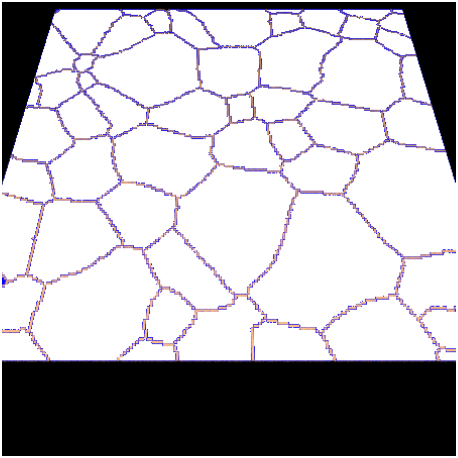
$p \to \infty$: Forêt Couvrante de Poids Max
(Ligne de partage des eaux) [Allène et al. 2007]

Ligne de partage des eaux et forêts couvrantes

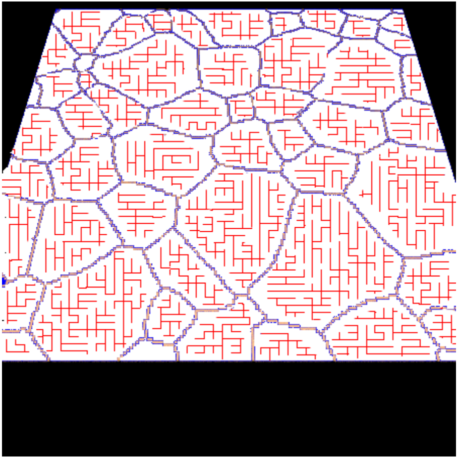
Ligne de partage des eaux et forêts couvrantes



Ligne de partage des eaux et forêts couvrantes



Ligne de partage des eaux et forêts couvrantes



LPE Puissance

Cadre unificateur de problèmes de segmentation

$$x^*_{p,q} = \arg\min_x \underbrace{\sum_{e_{ij}\in E} {w_{ij}}^p |x_i - x_j|^q}_{\text{Régularisation}} + \underbrace{\sum_{v_i\in V} {w_i}^p |x_i - l_i|^q}_{\text{Fidélité au données}}$$

q/p	fini	∞
1	Coupes minimales	Forêt couvrante de poids max (Ligne de Partage des Eaux)
2	Marcheur aléatoire	
∞		Plus courts chemins

LPE Puissance

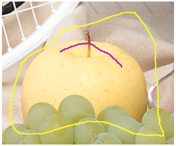
Cadre unificateur de problèmes de segmentation

$$x^*_{p,q} = \arg\min_x \underbrace{\sum_{e_{ij}\in E} {w_{ij}}^p |x_i - x_j|^q}_{\text{Régularisation}} + \underbrace{\sum_{v_i \in V} {w_i}^p |x_i - l_i|^q}_{\text{Fidélité au données}}$$

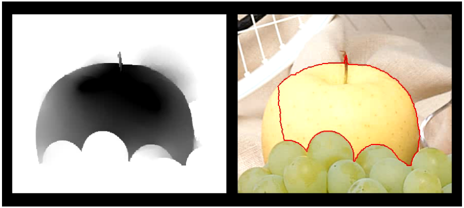
q/p	fini	∞
1	Coupes minimales	Forêt couvrante de poids max (Ligne de Partage des Eaux)
2	Marcheur aléatoire	$\bar{x} = \lim_{p\to\infty} x^*_{p,q}$ LPE Puissance
∞	Voronoi norme ℓ_1	Plus courts chemins

Convergence du marcheur aléatoire quand $p \to \infty$ vers une coupe par Ligne de Partage des Eaux

Marqueurs



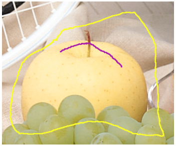
$$x^*{}_1 = \arg\min_x \underbrace{\sum_{e_{ij}\in E} w_{ij}{}^{1}|x_i - x_j|^2}_{\text{régularisation}} + \underbrace{\mathcal{D}(x)}_{\text{Fidélité aux données}}$$



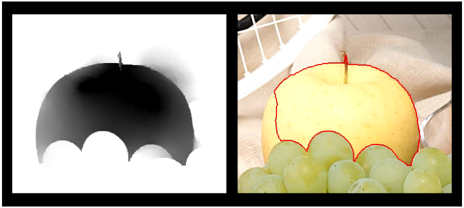
solution $x^*{}_1$ coupe : seuil de $x^*{}_1$

Convergence du marcheur aléatoire quand $p \to \infty$ vers une coupe par Ligne de Partage des Eaux

Marqueurs



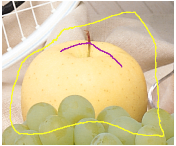
$$x^*_2 = \arg\min_x \underbrace{\sum_{e_{ij} \in E} w_{ij}^{\ 2} |x_i - x_j|^2}_{\text{régularisation}} + \underbrace{\mathcal{D}(x)}_{\text{Fidélité aux données}}$$



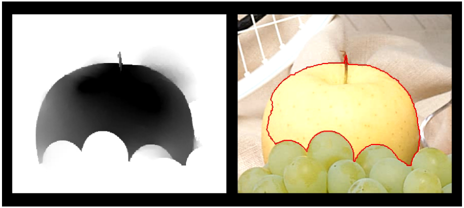
solution x^*_2 coupe : seuil de x^*_2

Convergence du marcheur aléatoire quand $p \to \infty$ vers une coupe par Ligne de Partage des Eaux

Marqueurs



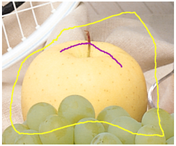
$$x^*_{3} = \arg\min_x \underbrace{\sum_{e_{ij}\in E} w_{ij}^{\;3} |x_i - x_j|^2}_{\text{régularisation}} + \underbrace{\mathcal{D}(x)}_{\text{Fidélité aux données}}$$



solution x^*_3 coupe : seuil de x^*_3

Convergence du marcheur aléatoire quand $p \to \infty$ vers une coupe par Ligne de Partage des Eaux

Marqueurs

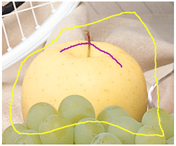


$$x^*_4 = \arg\min_x \underbrace{\sum_{e_{ij}\in E} w_{ij}^{\ 4} |x_i - x_j|^2}_{\text{régularisation}} + \underbrace{\mathcal{D}(x)}_{\text{Fidélité aux données}}$$

solution x^*_4 coupe : seuil de x^*_4

Convergence du marcheur aléatoire quand $p \to \infty$ vers une coupe par Ligne de Partage des Eaux

Marqueurs

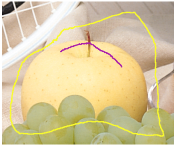


$$x^*_6 = \arg\min_x \underbrace{\sum_{e_{ij} \in E} w_{ij}{}^6 |x_i - x_j|^2}_{\text{régularisation}} + \underbrace{\mathcal{D}(x)}_{\substack{\text{Fidélité} \\ \text{aux données}}}$$

solution x^*_6 coupe : seuil de x^*_6

Convergence du marcheur aléatoire quand $p \to \infty$ vers une coupe par Ligne de Partage des Eaux

Marqueurs

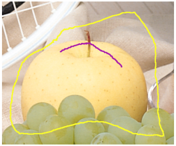


$$x^*_9 = \arg\min_x \underbrace{\sum_{e_{ij} \in E} w_{ij}{}^{9} |x_i - x_j|^2}_{\text{régularisation}} + \underbrace{\mathcal{D}(x)}_{\substack{\text{Fidélité} \\ \text{aux données}}}$$

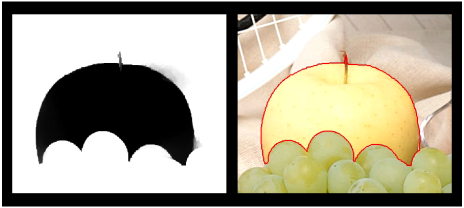
solution x^*_9 coupe : seuil de x^*_9

Convergence du marcheur aléatoire quand $p \to \infty$ vers une coupe par Ligne de Partage des Eaux

Marqueurs



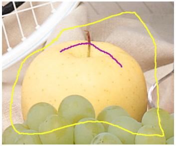
$$x_{13}{}^* = \arg\min_x \underbrace{\sum_{e_{ij} \in E} w_{ij}{}^{13} |x_i - x_j|^2}_{\text{régularisation}} + \underbrace{\mathcal{D}(x)}_{\text{Fidélité aux données}}$$



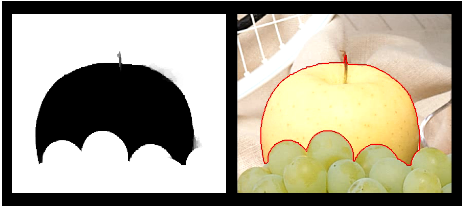
solution $x_{13}{}^*$ coupe : seuil de $x_{13}{}^*$

Convergence du marcheur aléatoire quand $p \to \infty$ vers une coupe par Ligne de Partage des Eaux

Marqueurs



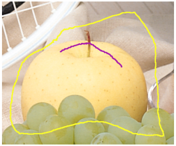
$$x_{18}{}^{*} = \arg\min_{x} \underbrace{\sum_{e_{ij} \in E} w_{ij}{}^{18} |x_i - x_j|^2}_{\text{régularisation}} + \underbrace{\mathcal{D}(x)}_{\text{Fidélité aux données}}$$



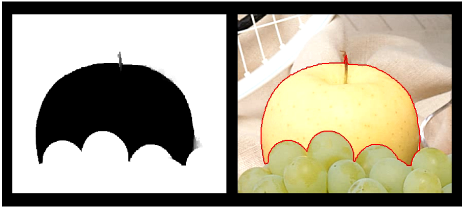
solution $x_{18}{}^{*}$ coupe : seuil de $x_{18}{}^{*}$

Convergence du marcheur aléatoire quand $p \to \infty$ vers une coupe par Ligne de Partage des Eaux

Marqueurs



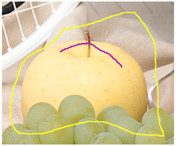
$$x_{24}{}^{*} = \arg\min_{x} \underbrace{\sum_{e_{ij} \in E} w_{ij}{}^{24} |x_i - x_j|^2}_{\text{régularisation}} + \underbrace{\mathcal{D}(x)}_{\text{Fidélité aux données}}$$



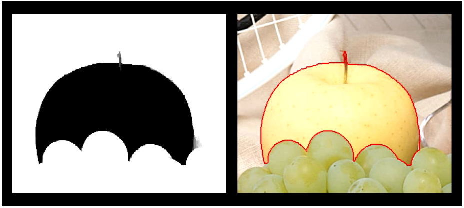
solution $x_{24}{}^{*}$ coupe : seuil de $x_{24}{}^{*}$

Convergence du marcheur aléatoire quand $p \rightarrow \infty$ vers une coupe par Ligne de Partage des Eaux

Marqueurs



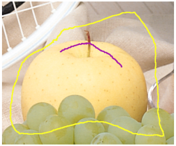
$$x_{30}{}^* = \arg\min_x \underbrace{\sum_{e_{ij} \in E} w_{ij}{}^{30} |x_i - x_j|^2}_{\text{régularisation}} + \underbrace{\mathcal{D}(x)}_{\text{Fidélité aux données}}$$



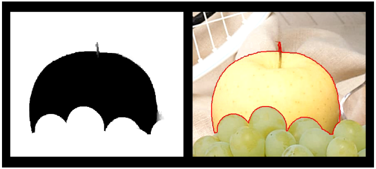
solution $x_{30}{}^*$ coupe : seuil de $x_{30}{}^*$

Convergence du marcheur aléatoire quand $p \to \infty$ vers une coupe par Ligne de Partage des Eaux

Marqueurs



$$x_p{}^* = \arg\min_x \underbrace{\sum_{e_{ij}\in E} w_{ij}{}^p |x_i - x_j|^q}_{\text{régularisation}} + \underbrace{\mathcal{D}(x)}_{\text{Fidélité aux données}}$$



$\bar{x} = \lim_{p\to\infty} x_p^*$ coupe : seuil de $\bar{x}$

Théorèmes

Quand $p \to \infty$,

- la coupe obtenue est une coupe par forêt couvrante de poids max.
- quand $q > 1$, la solution $\bar{x}$ est unique.

Algorithme pour le cas $p \to \infty$, quelque soit $q > 1$

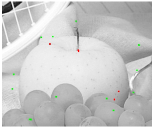
Calcul de l'étiquetage de graphe limite x quand $p \to \infty$ minimisant $\sum_{e_{ij} \in E} {w_{ij}}^p |x_i - x_j|^q$ sujet à des contraintes (marqueurs)

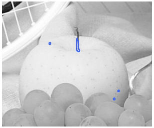
- Construire une forêt couvrante de poids max hors des plateaux, et optimiser

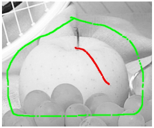
$$x^* = \arg\min_x \sum_{e_{ij} \in \text{plateau}} |x_i - x_j|^q$$

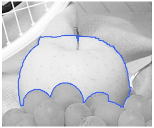
  sur les plateaux.
- Nous appelons cet algorithme "LPE Puissance".

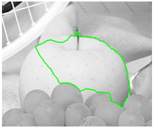
Comparaison des résultats

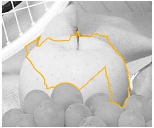

Marqueurs

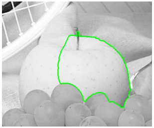

Coupes min

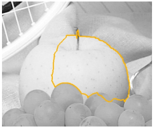

Marqueurs

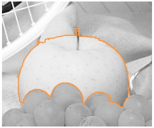

Coupes min

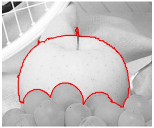

March. aléatoire

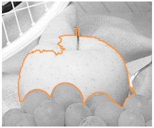

Courts chemins

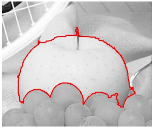

March. aléatoire


Courts chemins


LPE


LPE Puissance $q = 2$


LPE

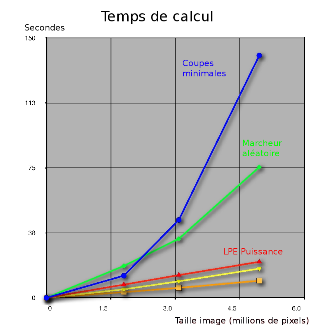

LPE Puissance $q = 2$

Contributions scientifiques

Applications de la LPE Puissance

LPE Puissance : outil d'optimisation très efficace

- segmentation avec marqueurs
- filtrage – optimisation non-convexe
- reconstruction 3D (à partir d'images)
- reconstruction de surfaces (de nuages de points)
- segmentation sémantique

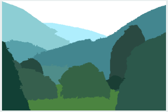


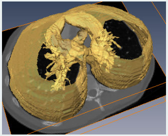
Contributions scientifiques

Applications de la LPE Puissance

LPE Puissance : outil d'optimisation très efficace

- segmentation avec marqueurs
- filtrage – optimisation non-convexe
- reconstruction 3D (à partir d'images)
- reconstruction de surfaces (de nuages de points)
- segmentation sémantique





Contributions scientifiques

Applications de la LPE Puissance

LPE Puissance : outil d'optimisation très efficace

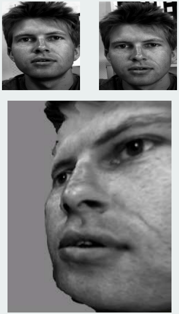
- segmentation avec marqueurs
- filtrage – optimisation non-convexe
- reconstruction 3D (à partir d'images)
- reconstruction de surfaces (de nuages de points)
- segmentation sémantique

Contributions scientifiques

Applications de la LPE Puissance

LPE Puissance : outil d'optimisation très efficace

- segmentation avec marqueurs
- filtrage – optimisation non-convexe
- reconstruction 3D (à partir d'images)
- reconstruction de surfaces (de nuages de points)
- segmentation sémantique

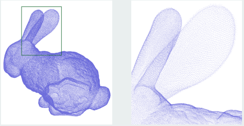


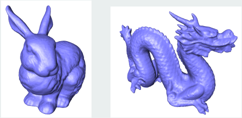
Contributions scientifiques

Applications de la LPE Puissance

LPE Puissance : outil d'optimisation très efficace

- segmentation avec marqueurs
- filtrage – optimisation non-convexe
- reconstruction 3D (à partir d'images)
- reconstruction de surfaces (de nuages de points)
- segmentation sémantique





Contributions scientifiques

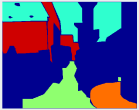
Applications de la LPE Puissance

LPE Puissance : outil d'optimisation très efficace

- segmentation avec marqueurs
- filtrage – optimisation non-convexe
- reconstruction 3D (à partir d'images)
- reconstruction de surfaces (de nuages de points)
- segmentation sémantique

image

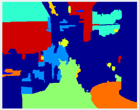
vérité terrain



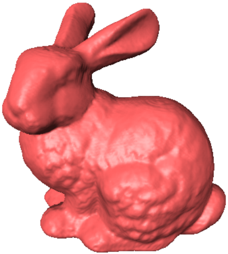
légende

mur table
plafond sol
arriere plan
étagère

résultat



Comparaisons pour la reconstruction de surfaces



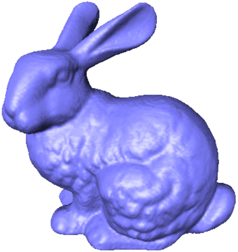
Variation totale

Taille requise des marqueurs

Coupes minimales

Taille requise des marqueurs

estimation des normales à la surface requises



LPE Puissance

Taille requise des marqueurs

Conclusion

Reformulation du problème classique des flots max

- Effets de blocs des flots max classiques
- Problèmes de convergence de AT-CMF
- Filtrage par coupes minimales coûteux

La LPE Puissance répond à plusieurs problèmes des méthodes classiques

- Solution non unique
- Effets de fuites
- Random Walker, Graph cuts : complexité super-linéaire

Conclusion

Reformulation du problème classique des flots max

- Effets de blocs des flots max classiques Absents avec CCMF
- Problèmes de convergence de AT-CMF
- Filtrage par coupes minimales coûteux

La LPE Puissance répond à plusieurs problèmes des méthodes classiques

- Solution non unique
- Effets de fuites
- Random Walker, Graph cuts : complexité super-linéaire

Conclusion

Reformulation du problème classique des flots max

- Effets de blocs des flots max classiques Absents avec CCMF
- Problèmes de convergence de AT-CMF Convergence guarantie
- Filtrage par coupes minimales coûteux

La LPE Puissance répond à plusieurs problèmes des méthodes classiques

- Solution non unique
- Effets de fuites
- Random Walker, Graph cuts : complexité super-linéaire

Conclusion

Reformulation du problème classique des flots max

- Effets de blocs des flots max classiques Absents avec CCMF
- Problèmes de convergence de AT-CMF Convergence guarantie
- Filtrage par coupes minimales coûteux CCMF étendu aux problèmes multi-labels : cadre de filtrage flexible dans les graphes

La LPE Puissance répond à plusieurs problèmes des méthodes classiques

- Solution non unique
- Effets de fuites
- Random Walker, Graph cuts : complexité super-linéaire

Conclusion

Reformulation du problème classique des flots max

- Effets de blocs des flots max classiques Absents avec CCMF
- Problèmes de convergence de AT-CMF Convergence guarantie
- Filtrage par coupes minimales coûteux CCMF étendu aux problèmes multi-labels : cadre de filtrage flexible dans les graphes

La LPE Puissance répond à plusieurs problèmes des méthodes classiques

- Solution non unique Solution unique
- Effets de fuites
- Random Walker, Graph cuts : complexité super-linéaire

Conclusion

Reformulation du problème classique des flots max

- Effets de blocs des flots max classiques Absents avec CCMF
- Problèmes de convergence de AT-CMF Convergence guarantie
- Filtrage par coupes minimales coûteux CCMF étendu aux problèmes multi-labels : cadre de filtrage flexible dans les graphes

La LPE Puissance répond à plusieurs problèmes des méthodes classiques

- Solution non unique Solution unique
- Effets de fuites Réduction des fuites
- Random Walker, Graph cuts : complexité super-linéaire

Conclusion

Reformulation du problème classique des flots max

- Effets de blocs des flots max classiques Absents avec CCMF
- Problèmes de convergence de AT-CMF Convergence guarantie
- Filtrage par coupes minimales coûteux CCMF étendu aux problèmes multi-labels : cadre de filtrage flexible dans les graphes

La LPE Puissance répond à plusieurs problèmes des méthodes classiques

- Solution non unique Solution unique
- Effets de fuites Réduction des fuites
- Random Walker, Graph cuts : complexité super-linéaire Expérimentalement linéaire.

Conclusion

Reformulation du problème classique des flots max

- Effets de blocs des flots max classiques Absents avec CCMF
- Problèmes de convergence de AT-CMF Convergence guarantie
- Filtrage par coupes minimales coûteux CCMF étendu aux problèmes multi-labels : cadre de filtrage flexible dans les graphes

La LPE Puissance répond à plusieurs problèmes des méthodes classiques

- Solution non unique Solution unique
- Effets de fuites Réduction des fuites
- Random Walker, Graph cuts : complexité super-linéaire Expérimentalement linéaire.
- Plus important : la capacité de minimiser des énergies multi-labels ouvre la voie à de nombreuses applications

Questions

Code source pour la segmentation d'image disponible à:

http ://sourceforge.net/projects/powerwatershed/

References

Journals

- C. Couprie, L. Grady, L. Najman, J.C. Pesquet, and H. Talbot : Constrained TV-based regularization on graphs. *Submitted, Oct. 2011*.
- C. Couprie, L. Grady, H. Talbot, and L. Najman : Combinatorial Continuous Max flows. In *SIAM journal on imaging sciences, 2011*.
- C. Couprie, L. Grady, L. Najman, and H. Talbot : Power Watersheds : A unifying graph-based optimization framework. In *IEEE Trans. on PAMI 2011*.

International conferences

- C. Couprie, H. Talbot, J.C. Pesquet, L. Najman, and L. Grady : Dual constrained tv-based regularization. In *Proc. of ICASSP, 2011*.
- C. Couprie, X. Bresson, L. Najman, H. Talbot and L. Grady : Surface reconstruction using Power watersheds. In *Proc. of ISMM 2011*.
- C. Couprie, L. Grady, L. Najman, and H. Talbot : Anisotropic diffusion using power watersheds. In *Proc. of ICIP 2010*.
- C. Couprie, L. Grady, L. Najman, and H. Talbot : Power watersheds : A new image segmentation framework extending graph cuts, random walker and optimal spanning forest. In *Proc. of ICCV 2009*.

Mathilde Noual

About time and the structure of interaction systems

Colloquium d'informatique de l'UPMC – Sorbonne Universités

25/06/2013

About time and the structure of interaction systems

Mathilde Noual

Interaction systems

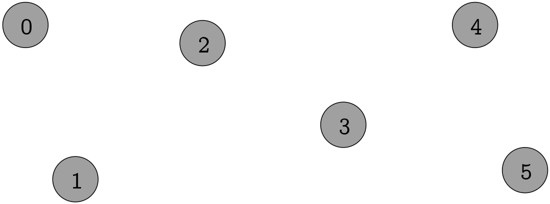
DEFINITION :

An interaction system is any system that can be defined by a set of interacting entities such that all events that are possible in this system

- are caused by interactions between these entities,
- correspond to changes of states of these entities.

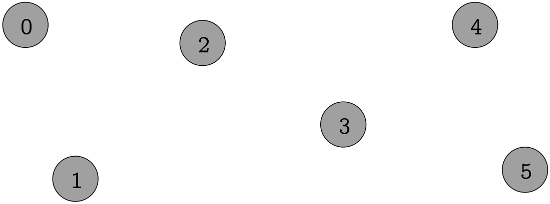
The prototype

– Boolean automata networks –



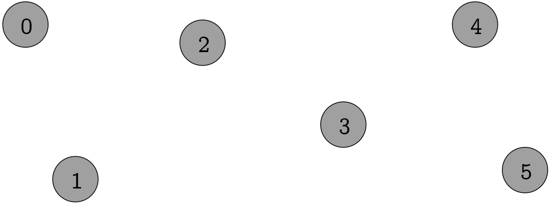
A set V of automata

Defining the prototype ...



A set V of automata

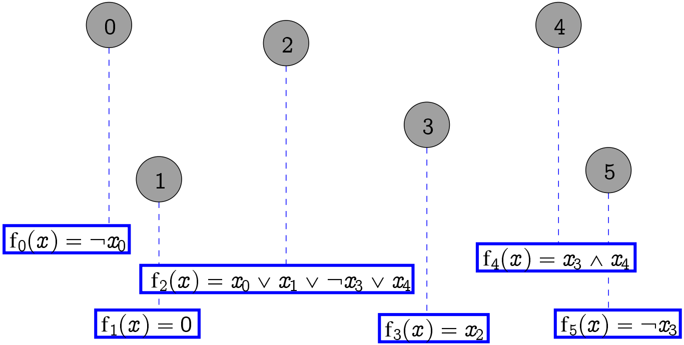
with variable states x_i, $\forall i \in \mathrm{V}$



A set V of automata

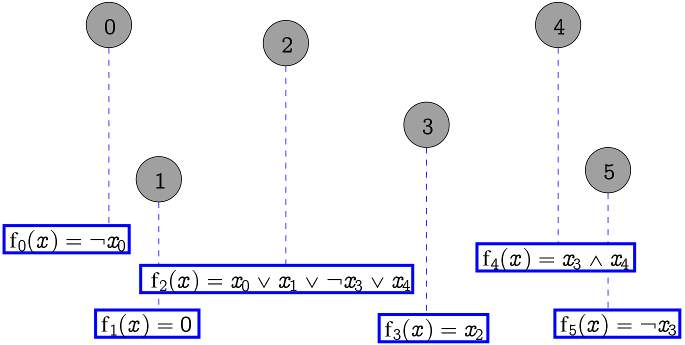
with <u>Boolean</u> states $x_i \in \mathbb{B},\ \forall i \in \mathrm{V}$

Defining the prototype ...



$\forall i \in V$, a **local transition function** $\boxed{f_i : \mathbb{B}^n \mapsto \mathbb{B}}$

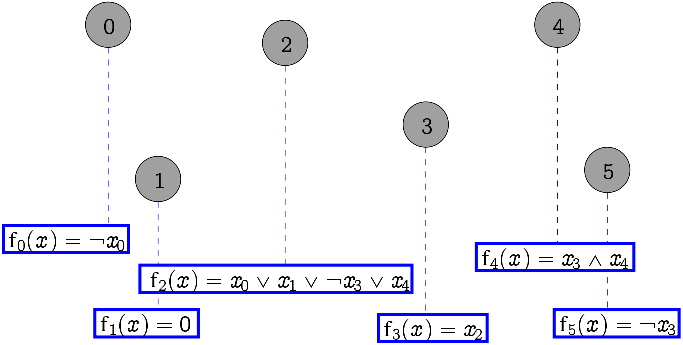
(locally monotone)



$\forall i \in V$, a **local transition function** $\boxed{f_i : \mathbb{B}^n \mapsto \mathbb{B}}$

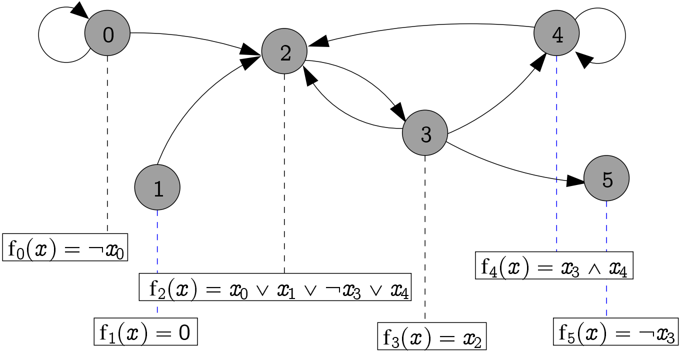
(locally monotone)

Defining the prototype ...



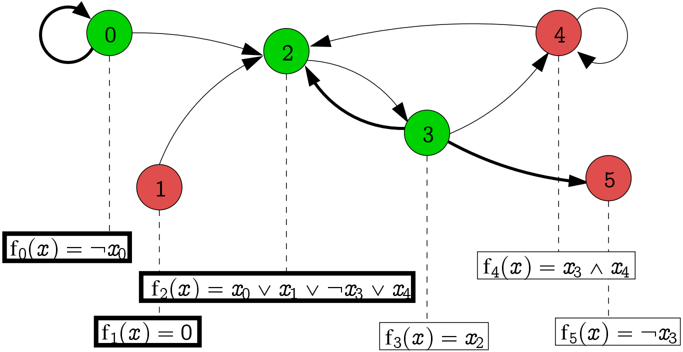
DEFINITION: A Boolean automata network is a set of Boolean functions :

$$\mathcal{N} = \{\ f_i : \mathbb{B}^{|V|} \to \mathbb{B}\ \mid i \in V\}$$

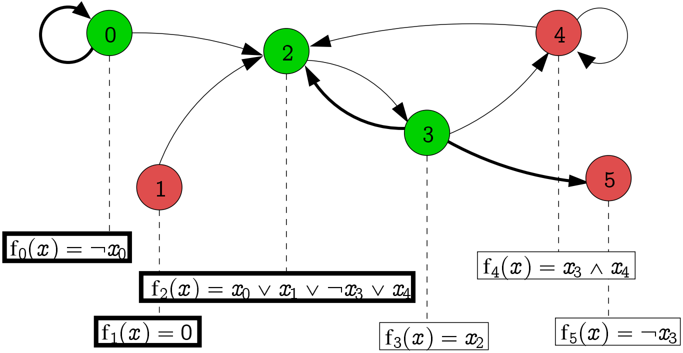


The interaction graph/structure $G = (V, A)$

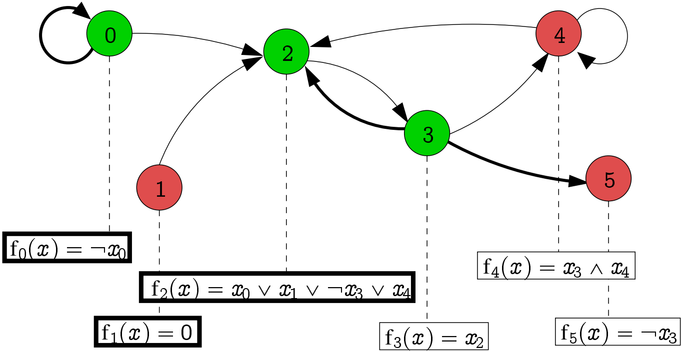
Automata Updates & Network Transitions

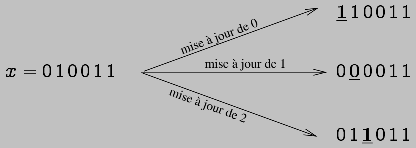

0
1
2
3
4
5
$f_0(x) = \neg x_0$
$f_1(x) = 0$
$f_2(x) = x_0 \vee x_1 \vee \neg x_3 \vee x_4$
$f_3(x) = x_2$
$f_4(x) = x_3 \wedge x_4$
$f_5(x) = \neg x_3$

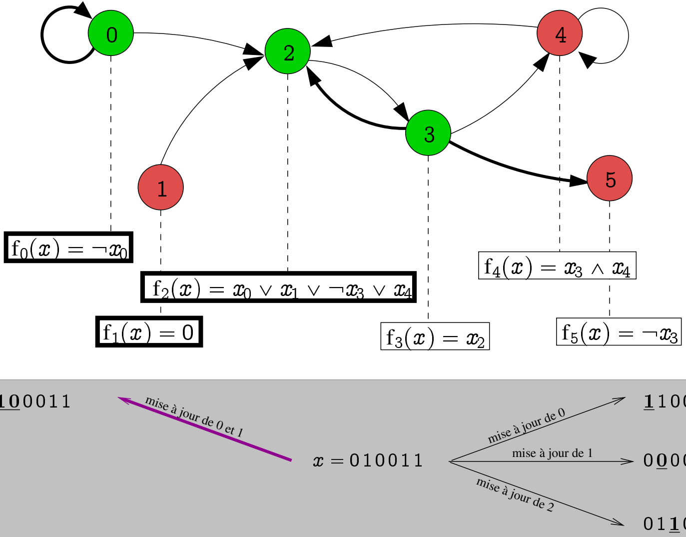
$x = 010011$

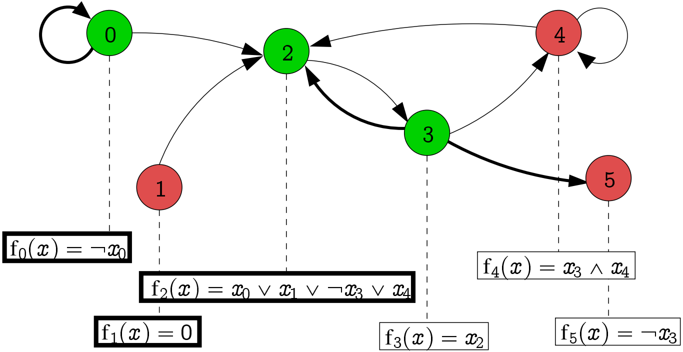


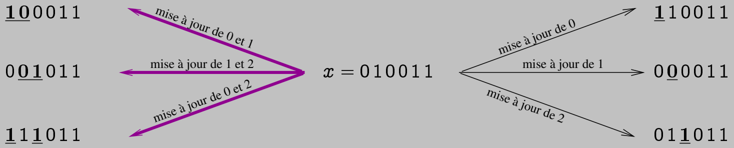
$$x = 010011 \xrightarrow{\text{mise à jour de 0}} \underline{\mathbf{1}}10011$$

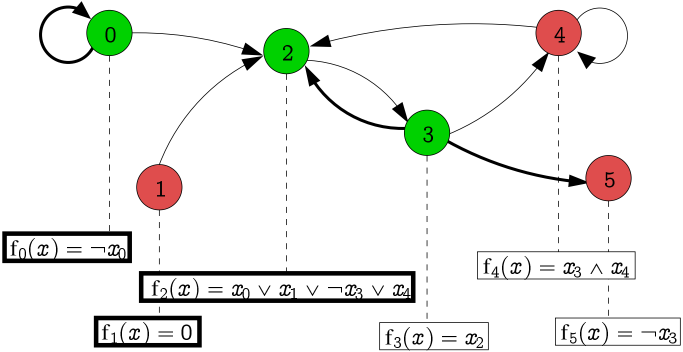

0
2
4
1
3
5
$f_0(x) = \neg x_0$
$f_2(x) = x_0 \vee x_1 \vee \neg x_3 \vee x_4$
$f_1(x) = 0$
$f_3(x) = x_2$
$f_4(x) = x_3 \wedge x_4$
$f_5(x) = \neg x_3$


$x = 010011$
mise à jour de 0
$\underline{1}10011$
mise à jour de 1
$0\underline{0}0011$
mise à jour de 2
$01\underline{1}011$

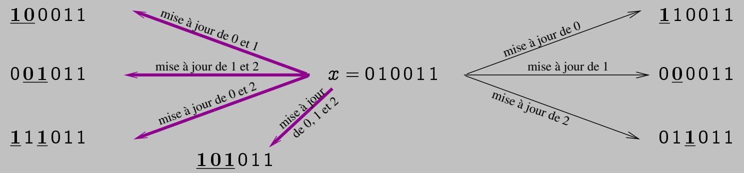

0
2
4
1
3
5
$f_0(x) = \neg x_0$
$f_1(x) = 0$
$f_2(x) = x_0 \vee x_1 \vee \neg x_3 \vee x_4$
$f_3(x) = x_2$
$f_4(x) = x_3 \wedge x_4$
$f_5(x) = \neg x_3$
$\underline{10}0011$
mise à jour de 0 et 1
$x = 010011$
mise à jour de 0
$\underline{1}10011$
mise à jour de 1
$0\underline{0}0011$
mise à jour de 2
$01\underline{1}011$


0
1
2
3
4
5
$f_0(x) = \neg x_0$
$f_1(x) = 0$
$f_2(x) = x_0 \vee x_1 \vee \neg x_3 \vee x_4$
$f_3(x) = x_2$
$f_4(x) = x_3 \wedge x_4$
$f_5(x) = \neg x_3$

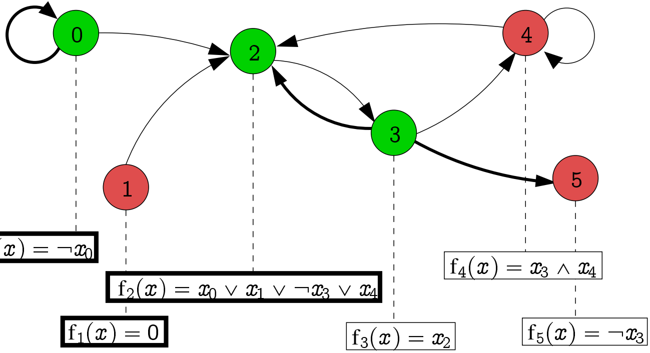

$\underline{\mathbf{1}}\underline{\mathbf{0}}0011$
$0\underline{\mathbf{0}}\underline{\mathbf{1}}011$
$\underline{\mathbf{1}}1\underline{\mathbf{1}}011$
mise à jour de 0 et 1
mise à jour de 1 et 2
mise à jour de 0 et 2
$x = 010011$
mise à jour de 0
mise à jour de 1
mise à jour de 2
$\underline{\mathbf{1}}10011$
$0\underline{\mathbf{0}}0011$
$01\underline{\mathbf{1}}011$

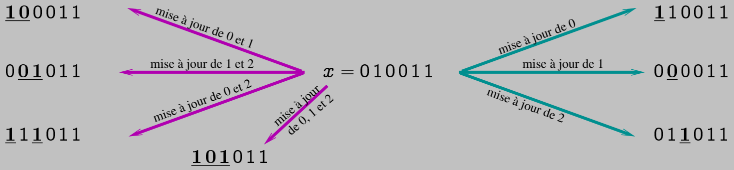


0
2
4
1
3
5
$f_0(x) = \neg x_0$
$f_2(x) = x_0 \vee x_1 \vee \neg x_3 \vee x_4$
$f_1(x) = 0$
$f_3(x) = x_2$
$f_4(x) = x_3 \wedge x_4$
$f_5(x) = \neg x_3$



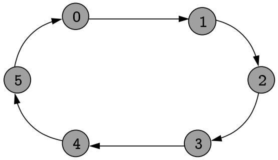
100011
001011
111011
101011
mise à jour de 0 et 1
mise à jour de 1 et 2
mise à jour de 0 et 2
mise à jour de 0, 1 et 2
$x = 010011$
mise à jour de 0
mise à jour de 1
mise à jour de 2
110011
000011
011011

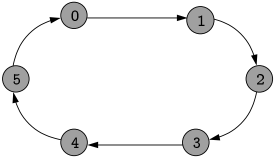

0
2
4
1
3
5
$f_0(x) = \neg x_0$
$f_2(x) = x_0 \vee x_1 \vee \neg x_3 \vee x_4$
$f_1(x) = 0$
$f_3(x) = x_2$
$f_4(x) = x_3 \wedge x_4$
$f_5(x) = \neg x_3$


100011
001011
111011
101011
mise à jour de 0 et 1
mise à jour de 1 et 2
mise à jour de 0 et 2
mise à jour de 0, 1 et 2
$x = 010011$
mise à jour de 0
mise à jour de 1
mise à jour de 2
110011
000011
011011

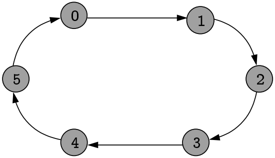
Synchronism *vs* Asynchronism

Synchronism *vs* Asynchronism



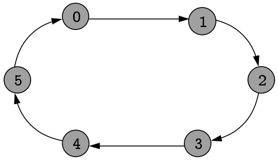


For cycles, synchronism tends to entertain local & global instabilities that only some asynchronism can filter out.



For cycles, synchronism tends to entertain local & global instabilities that only some asynchronism can filter out.

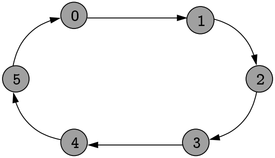
But there exists networks for which asynchronism entertains instabilities that only some synchronism can filter out.



For cycles, synchronism tends to entertain local & global instabilities that only some asynchronism can filter out.

But there exists networks for which asynchronism entertains instabilities that only some synchronism can filter out.

But these networks are rare. Thus, for most networks, synchronism adds no new possibilities.



For cycles, synchronism tends to entertain local & global instabilities that only some asynchronism can filter out.

But there exists networks for which asynchronism entertains instabilities that only some synchronism can filter out.

How come ?

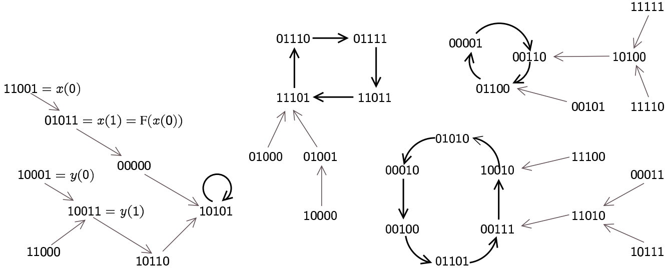
But these networks are rare. Thus, for most networks, synchronism adds no new possibilities.

How come ?

The Parallel Update Schedule

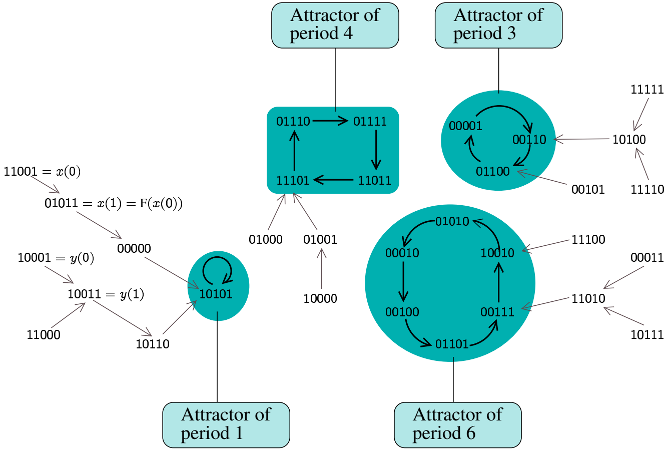
DEFINITION:

The transition graph induced by the parallel update schedule is the graph of function : $x \in \mathbb{B}^n \mapsto (\, \mathrm{f}_0(x), \mathrm{f}_1(x), \ldots, \mathrm{f}_{n-1}(x) \,) \in \mathbb{B}^n$.



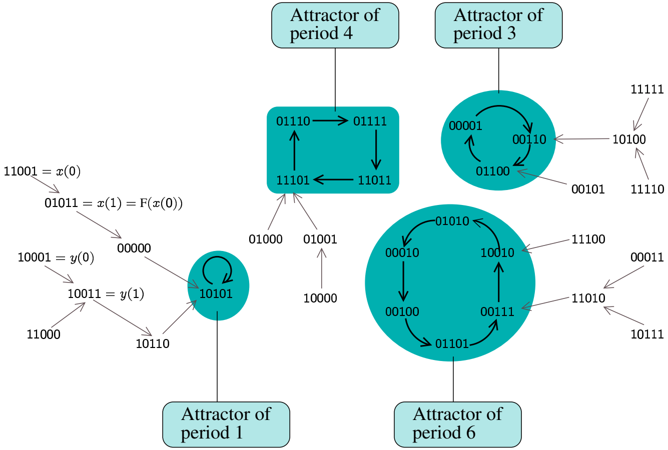
DEFINITION:

The transition graph induced by the parallel update schedule is the graph of function : $x \in \mathbb{B}^n \mapsto (\,\mathrm{f}_0(x),\, \mathrm{f}_1(x),\, \ldots,\, \mathrm{f}_{n-1}(x)\,) \in \mathbb{B}^n$.



DEFINITION:

The transition graph induced by the parallel update schedule is the graph of function : $x \in \mathbb{B}^n \mapsto (\, f_0(x), f_1(x), \ldots, f_{n-1}(x) \,) \in \mathbb{B}^n$.



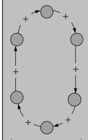
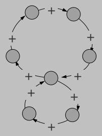
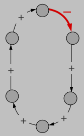
$$\text{Order} = \omega = \text{lcm of periods}$$

$$\text{Global instability} = \mathrm{T} = \text{number of attractors}$$

Cycles Interacting in Parallel

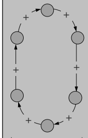
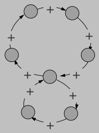
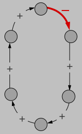
Under the parallel update schedule . . .

Theorem

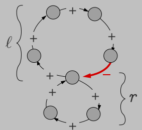
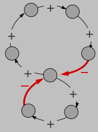
Network $\mathcal{N}$	$\mathcal{C}_n^+$	$\mathcal{D}_{\ell\, r}^{++}$	$\mathcal{C}_n^-$
	 circuit de taille n	 $\mathrm{pgcd}(\ell, r) = n$	
Order $\omega \in \mathbb{N}$ of $\mathcal{N}$	n		$2n$
Number of configurations of period $p \mid \omega$	2^p		$\neg(p \mid n) \cdot 2^{\frac{p}{2}}$
Number of attractors of period $p \mid \omega$	$\frac{1}{p} \sum_{d \mid p} \mu\left(\frac{p}{d}\right) 2^d$		$\frac{1}{p} \sum_{k \text{ impair } \mid p} \mu(k)\, 2^{\frac{p}{2k}}$
Total number of attractors	$\frac{1}{n} \sum_{d \mid n} \varphi\left(\frac{n}{d}\right) 2^d$		$\frac{1}{2n} \sum_{k \text{ impair } \mid 2n} \varphi(k)\, 2^{\frac{n}{2k}}$

Under the parallel update schedule ...

Theorem

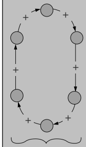
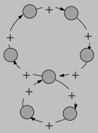
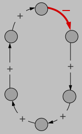
Network $\mathcal{N}$	$\mathcal{C}_n^+$	$\mathcal{D}_{\ell\, r}^{++}$	$\mathcal{C}_n^-$
	 $\underbrace{\hphantom{xxxx}}$ circuit de taille n	 $\mathrm{pgcd}(\ell, r) = n$	
Order $\omega \in \mathbb{N}$ of $\mathcal{N}$	n		$2n$
Number of configurations of period $p\|\omega$	2^p		$\neg(p\|n) \cdot 2^{\frac{p}{2}}$
Number of attractors of period $p\|\omega$	$\frac{1}{p}\sum_{d\|p}\mu\left(\frac{p}{d}\right)2^d$		$\frac{1}{p}\sum_{k \text{ impair } \|p}\mu(k)\,2^{\frac{p}{2k}}$
Total number of attractors	$\frac{1}{n}\sum_{d\|n}\varphi\left(\frac{n}{d}\right)2^d$		$\frac{1}{2n}\sum_{k \text{ impair } \|2n}\varphi(k)\,2^{\frac{n}{2k}}$

Theorem

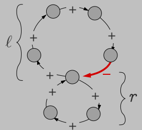
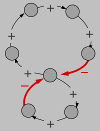
$\mathcal{D}_{\ell\, r}^{-+}$	$\mathcal{D}_{\ell\, r}^{--}$
	
r (except exceptions)	$\ell + r$
$\neg(p\|\ell) \cdot \mathrm{L}\left(\frac{p}{n_p}\right)^{n_p}$	$\neg(p\|n) \cdot \mathrm{P}\left(\frac{p}{n_p}\right)^{n_p}$
$\frac{1}{p}\sum_{d\|p,\neg(d\|\ell)}\mu\left(\frac{p}{d}\right)\mathrm{L}\left(\frac{d}{n_d}\right)^{n_d}$	$\frac{1}{p}\sum_{d\|p,\neg(d\|n)}\mu\left(\frac{p}{d}\right)\mathrm{P}\left(\frac{d}{n_d}\right)^{n_d}$
$\frac{1}{r}\sum_{d\|r,\neg(d\|\ell)}\varphi\left(\frac{r}{d}\right)\mathrm{L}\left(\frac{d}{n_d}\right)^{n_d}$	$\frac{1}{\ell+r}\sum_{d\|\ell+r,\neg(d\|n)}\varphi\left(\frac{\ell+r}{d}\right)\mathrm{P}\left(\frac{d}{n_d}\right)^{n_d}$

Under the parallel update schedule . . .

Theorem

Network $\mathcal{N}$	$\mathcal{C}_n^{+}$	$\mathcal{D}_{\ell\, r}^{++}$	$\mathcal{C}_n^{-}$
	 circuit de taille n	 $\text{pgcd}(\ell, r) = n$	
Order $\omega \in \mathbb{N}$ of $\mathcal{N}$	n		$2n$
Total number of attractors	$\mathrm{T}^{+} = \mathrm{T}^{++}$		T^{-}

Theorem

$\mathcal{D}_{\ell\, r}^{-+}$	$\mathcal{D}_{\ell\, r}^{--}$
	
r	$\ell + r$
(except exceptions)	
T^{-+}	T^{--}

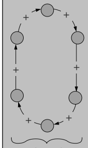
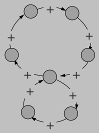
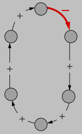
CONJECTURE:

$$\mathrm{T} \leqslant 2\mathrm{A}_\omega$$

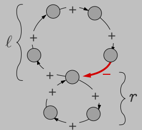
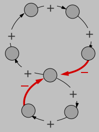
$\Rightarrow$ The mean attractor period is no smaller than $\frac{\omega}{2}$.

Under the parallel update schedule . . .

Theorem

Network $\mathcal{N}$	$\mathcal{C}_n^+$	$\mathcal{D}_{\ell\, r}^{++}$	$\mathcal{C}_n^-$
	 circuit de taille n	 $\mathrm{pgcd}(\ell, r) = n$	
Order $\omega \in \mathbb{N}$ of $\mathcal{N}$	n		$2n$
Total number of attractors	$\mathrm{T}^+ = \mathrm{T}^{++}$		$\mathrm{T}^- \leqslant \frac{\mathrm{T}^+}{2^{\omega/2-1}}$

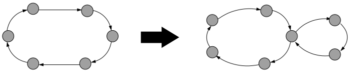
Theorem

$\mathcal{D}_{\ell\, r}^{-+}$	$\mathcal{D}_{\ell\, r}^{--}$
	
r (except exceptions)	$\ell + r$
$\mathrm{T}^{-+} \leqslant \frac{\sqrt{3}^{\omega}}{2^{\omega-1}} \mathrm{T}^+$	$\mathrm{T}^{--} \leqslant \frac{3^{\frac{\omega}{3}}}{2^{\omega-1}} \mathrm{T}^+$

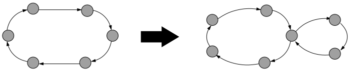
CONSEQUENCE:

Comparing total number of attractors of cycles & double-cycles of same order $\omega \in \mathbb{N}$:

The effect of cycle intersections



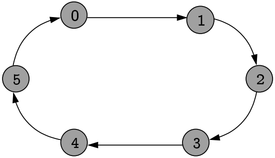
The effect of cycle intersections



THE CONJECTURE

$\nearrow\!\!\nearrow$ *Cycle intersections*	$\Rightarrow$	$\searrow\!\!\searrow$	*Global instability*
	$\Rightarrow$	$\searrow\!\!\searrow$	*Local instabilities*
	$\Rightarrow$	$\searrow\!\!\searrow$	*Sensitivity to time*

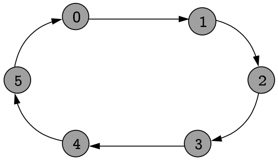
Ending



For cycles, synchronism tends to entertain local & global instabilities that only some asynchronism can filter out.

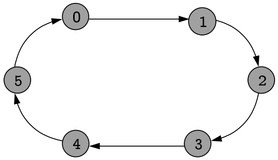
But there exists networks for which asynchronism entertains instabilities that only some synchronism can filter out.

But most networks are unsensitive to synchronism.



For cycles, synchronism tends to entertain local & global instabilities that only some asynchronism can filter out.

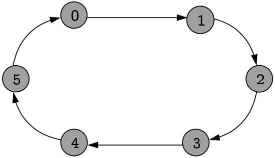
But most networks are unsensitive to synchronism.



For cycles, synchronism tends to entertain local & global instabilities that only some asynchronism can filter out.

But most networks are unsensitive to synchronism.

$\rightsquigarrow$ Most networks have cycle intersections forcing asynchrony anyway.

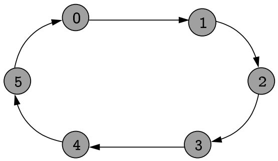


For cycles, synchronism tends to entertain local & global instabilities that only some asynchronism can filter out.

There exists networks for which asynchronism entertains instabilities that only some synchronism can filter out.

But most networks are unsensitive to synchronism.

$\rightsquigarrow$ Most networks have cycle intersections forcing asynchrony anyway.



For cycles, synchronism tends to entertain local & global instabilities that only some asynchronism can filter out.

There exists networks for which asynchronism entertains instabilities that only some synchronism can filter out.

$\rightsquigarrow$ Sensitivity to synchronism could be due essentially to 'non-monotony'.

But most networks are unsensitive to synchronism.

$\rightsquigarrow$ Most networks have cycle intersections forcing asynchrony anyway.

thank you!

Mathieu Feuillet

Bandwidth Allocation in Large Stochastic Networks

Bandwidth Allocation in Large Stochastic Networks

Mathieu Feuillet

Advisors: Thomas Bonald (Telecom ParisTech) and Philippe Robert (Inria)

Inria Paris-Rocquencourt[1]

25/06/2013

[1] Until 30/06/2012

Context

Would the Internet collapse without congestion control?

Is the bandwidth used efficiently by WiFi?

What is the mean lifetime of a file in a large distributed system?

Why is it similar?

Mathematical tools!

Classical: Probabilistic modeling (Markov).

Uncommon: Scaling methods.

Thesis specificity: Stochastic averaging.

Mathematics and probability

Mathematics:

Simulations and experiments allow to tackle a finite set of cases.

Some properties can only be proved with mathematics. This is a complementary approach of simulations and experiments.

Probability:

Network traffic is inherently random:

- User behavior
- Random failures
- Stochastic algorithms

Modeling

Goals:

- Understanding
- Algorithm design
- Dimensioning

Tools:

- Markov process
- Queueing theory
- Scaling methods

Stochastic models

State: let $(X(t))$ be a Markov process in $\mathbb{N}^d$.

Examples:

- Number of active flows in the Internet
- Number of files to be transmitted
- Number of stored files

Typical questions:

- Is it stable or unstable?
- If stable, what is the equilibrium?
- What are the transient properties?

Scaling methods

Principle: With N a scaling parameter,
study the evolution of the trajectories of the process.

$$\left(\frac{X^N(\alpha_N(t))}{\beta_N}\right)$$

when $N \to \infty$, with adapted functions $(\alpha_N(t))$ and (β_N).

Goal:
Give a first order description of $(X^N(t))$:

$$X^N(\alpha_N(t)) \approx \beta_N.x(t)$$

where $(x(t))$ is a simpler stochastic process or, ideally, a deterministic process.

Classical example: Fluid limit

$$\left(\bar{X}(t)\right) = \left(\frac{X(Nt)}{N}\right), \quad \text{with } N = \|X(0)\|.$$

Scaling parameter: initial state

Time scale: $t \mapsto Nt$

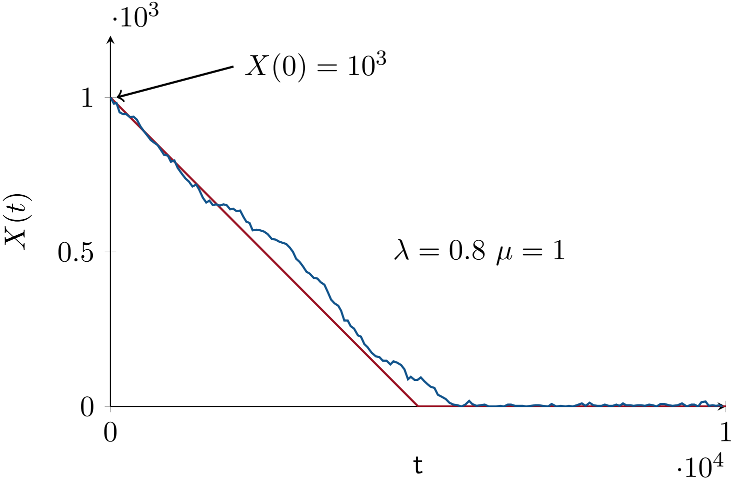
The fluid limit reaches 0

$\Downarrow$

The process is stable

Example: the fluid limit of a $M/M/1$ queue

$$\left(\bar{X}(t)\right) = \left(\frac{X(Nt)}{N}\right), \quad \text{with } N = X(0).$$



Stochastic averaging: principles

Two sequences of processes $(X^N(t))$ and $(Y^N(t))$ with

$(X^N(t))$	Slow process
$(Y^N(t))$	Fast process

When $N \to \infty$, there is time-scale separation:

Fast process:

- "Sees" $X^N(t) \approx x$ constant
- Converges to an equilibrium E_x depending on x

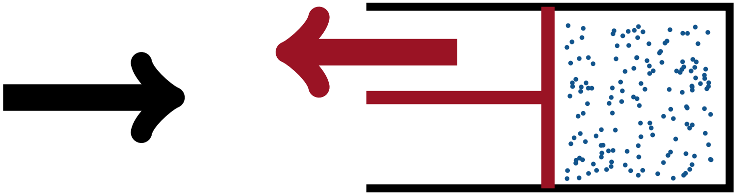
Slow process:

- "Sees" $(Y^N(t))$ constantly at equilibrium
- Its dynamics depends on $E_{X^N(t)}$

Non classical scaling method!

Stochastic averaging: Example

Consider a compressor.



Fast process:

$Y(t)$: Gas molecules agitation (thermal noise).

Slow process:

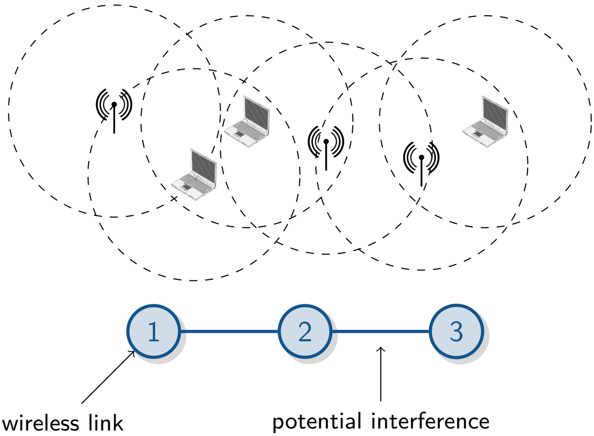
$X(t)$: Position of the compressor on which a constant force is applied.

Local equilibrium of the fast process:

Pressure $P_{Y(t)}$ depending on the volume...
and then on the position of the compressor.

Model

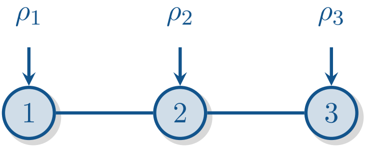
The network is modeled by an interference graph.



For each wireless link i:

- $X_i(t) \in \mathbb{N}$: number of flows at time t.
- $Y_i(t) = 1$ if i is active at time t and 0 otherwise.

Interference graph



Schedules: $\emptyset$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1,3\}$.

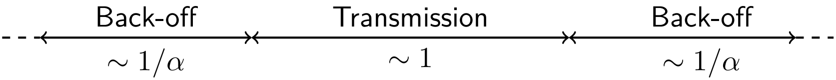
Schedule sequence is determined by the algorithm.

Optimal stability region : Convex hull of schedules.

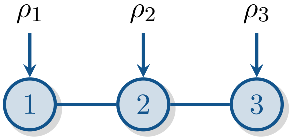
In this example: $\{\rho_1 + \rho_2 \leq 1,\ \rho_2 + \rho_3 \leq 1\}$.

Stability region of CSMA?

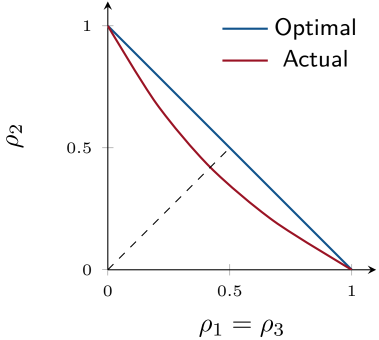
Standard CSMA



This algorithm is not optimal!



$$\rho_1 + \rho_2 \leq 1$$
$$\rho_2 + \rho_3 \leq 1$$



Proof: Fluid limits.

Suggestion: Flow-Aware CSMA

An exponential back-off for each flow, i.e. each transfered document.

Back-off	Transmission	Back-off
$\sim 1/(\alpha N \mathbf{x_1})$	$\sim 1/N$	$\sim 1/(\alpha N \mathbf{x_1})$

For each wireless link i,

- $X_i^N(t) \in \mathbb{N}$: number of flows at time t,
- $Y_i^N(t) = 1$ if node i is active at time t and 0 otherwise.

The process $(X^N(t), Y^N(t))$ is difficult to analyze.

Idea: Separate channel access and flow arrival/departure dynamics.
When $N \to \infty$, $(Y^N(t))$: classical loss network (*hard-core* model in statistical physics).

Stochastic averaging

Flow-Aware CSMA optimality

Theorem:

Flow-aware CSMA is optimal for any network.

Proof:

- Foster criteria and Lyapunov function (Potential function).

Conclusion

Mathematical analysis is necessary for network engineering. It allows to define network performance according to demand and capacity.

Uncommon mathematical tools:

- Scaling methods
- Stochastic averaging

Examples:

- Congestion control in the Internet
- Channel access in WiFi networks
- Distributed file system with failures